DIPLÔME NATIONAL DU BREVET

DNB BLANC JANVIER 2013

MATHEMATIQUES

SERIE COLLEGE

DUREE DE L'EPREUVE : 2 h 00

Le candidat répondra sur une copie double

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
Dès que le sujet lui sera remis, le candidat doit s'assurer qu'il est complet.

L'usage de la calculatrice est autorisé, dans le cadre de la réglementation en vigueur.

I- ACTIVITES NUMERIQUES	12 points
II- ACTIVITES GEOMETRIQUES	12 points
III- PROBLEME	12 points
Qualité de la rédaction et présentation	4 points

COLLEGE CONDORCET – LEVROUX

-Exercice 1 -

Quatre affirmations sont données ci-dessous.

Affirmation 1 : 215 et 190 sont premiers entre eux.

Affirmation 2 : 72 a exactement cinq diviseurs.

Affirmation 3 : Si n est un nombre entier, $(n - 1)(n + 1) + 1$ est toujours égal au carré d'un nombre entier.

Affirmation 4 : Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse **en argumentant la réponse**.

-Exercice 2 -

a) Calculer le PGCD de 1755 et 1053. Justifier votre réponse.

b) Ecrire la fraction $\frac{1053}{1755}$ sous la forme irréductible. Expliquer votre réponse.

c) Un collectionneur de coquillages possède 1755 cônes et 1053 porcelaines.

Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de coquillages et la même répartition de cônes et de porcelaines.

- Quel est le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser ?
- Combien y aura-t-il, dans ce cas, de cônes et de porcelaines par lot ?

-Exercice 3 -

On considère les deux fonctions g et h définies par :

$g(x) = 5x^2 + x - 7$ et $h(x) = 2x - 7$

x	-2	-1	0	1	2
$g(x) = 5x^2 + x - 7$		-3	-7	-1	15
$h(x) = 2x - 7$	-11	-9	-7	-5	

1) Donner un nombre qui a pour image -1 par la fonction g.

2) Calculer $g(-2)$ et compléter le tableau en annexe 1.

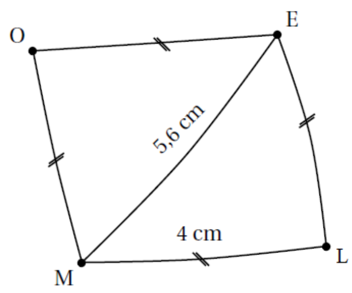
3) Calculer l'image de 2 par la fonction h et compléter le tableau en annexe 1.

4) **a)** Déduire du tableau une solution de l'équation $5x^2 + x - 7 = 2x - 7$.

b) Cette équation a-t-elle une autre solution que celle trouvée dans le tableau. Justifier la réponse.

-Exercice 4 -

Voici la figure à main levée d'un quadrilatère :



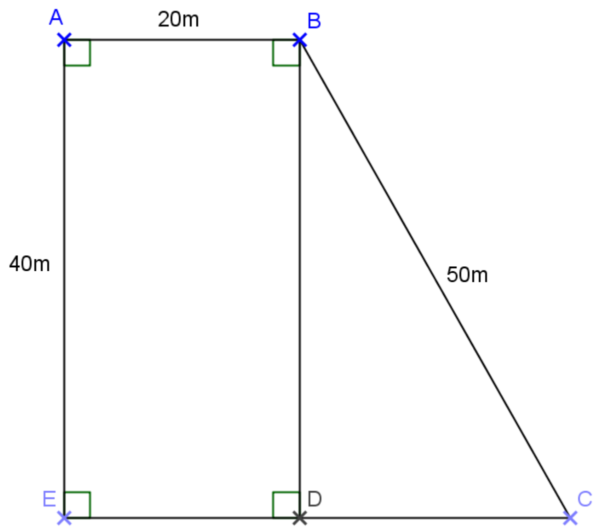
1) Reproduire ce quadrilatère en vraie grandeur (au verso de la feuille annexe).

2) Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère OELM est un losange ?

3) Marie soutient que le quadrilatère OELM est un carré, mais Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai. Qui a raison ? Pourquoi ?

-Exercice 5 -

Pierre vient d'acheter un terrain dont on peut assimiler la forme à la figure ci-contre :



Il souhaite mettre du gazon sur tout le terrain.

Pour cela, il veut acheter un produit qui se présente

en sacs de 15kg où il est écrit : « 1kg pour 35m² ».

a) Calculer la longueur DC. Justifier votre réponse.

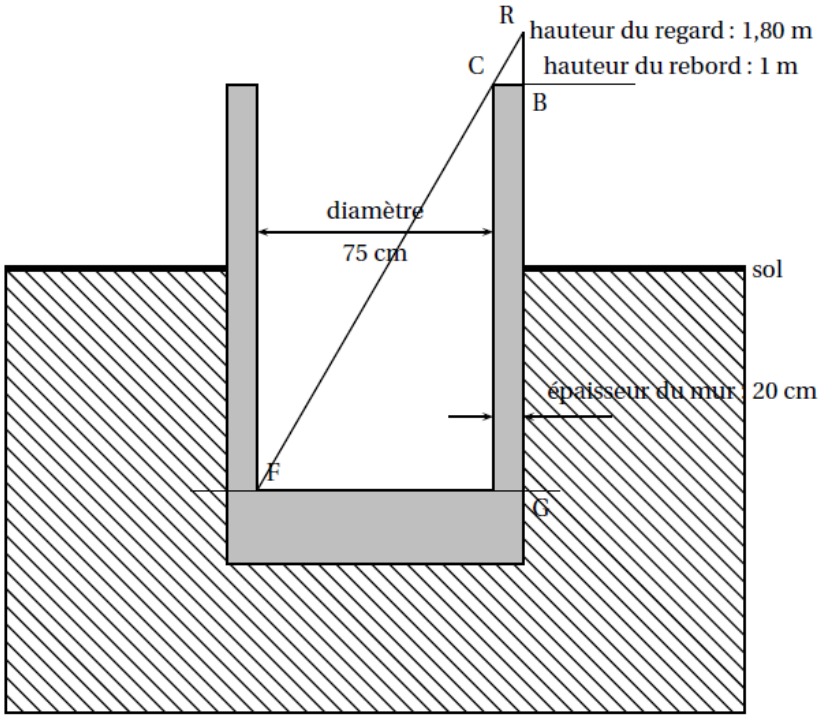
b) Combien de sacs de gazon devra t'il acheter ?

c) Enfin, il souhaite grillager le contour de son terrain.

Il dispose de 150m de grillage. Est-ce suffisant ? Justifier.

-Exercice 6 -

Un jeune berger se trouve au bord d'un puits de forme cylindrique dont le diamètre vaut 75 cm : il aligne son regard avec le bord intérieur du puits et le fond du puits pour en estimer la profondeur. Le fond du puits et le rebord sont horizontaux. Le puits est vertical.



1) En s'aidant du schéma ci-dessus (il n'est pas à l'échelle), donner les longueurs CB, FG et RB en mètres.

2) Calculer la profondeur BG du puits.

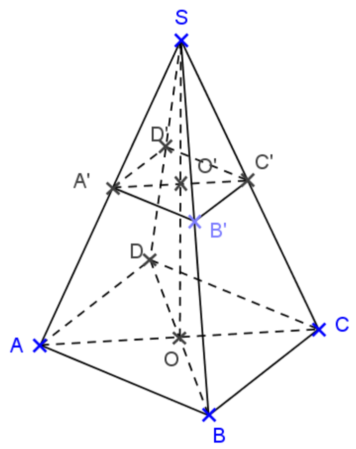
3) Le berger s'aperçoit que la hauteur d'eau dans le puits est de 2,60 m. Le jeune berger a besoin de 1 m^3 d'eau pour abreuver tous ses moutons. En trouvera-t-il suffisamment dans ce puits ? Expliquer la réponse.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même un trace de recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

-Exercice 7 -

Un fromage de chèvre a la forme d'un tronc de pyramide ABCDA'B'C'D' obtenu en coupant la pyramide SABCD par un plan parallèle à sa base et passant par le point O'. La pyramide SABCD a pour base le carré ABCD de centre O et pour hauteur [SO]. On donne AB = 8 cm, SO = 15 cm et SO' = 6 cm.

La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.



1) Donner une méthode permettant de calculer le volume du fromage de chèvre.
2) Calculer ensuite le volume du fromage de chèvre.

   Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même un trace de recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

-Exercice 8 -

Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20€.

Il a constaté que chaque réduction de 1€ du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Le graphique de l'annexe 3 représente la recette R en fonction du montant x de la réduction (en €).

a) Compléter le tableau de l'annexe 2.

Par lecture graphique, répondre aux questions ci-dessous :

On fera apparaître sur le graphique en annexe 3 les tracés nécessaires à la lecture.

b) Quelle est la recette pour une réduction de 2€ ?

c) Quel est le montant de la réduction pour une recette de 4000€ ? Quel est alors le prix d'une place ?

d) Quelle est l'image de 8 par la fonction R ? Interpréter ce résultat pour le problème.

e) Quelle est la recette maximale ? Quel est alors le prix d'une place ?

f) On admet que le montant de la recette est donné par la formule :

$R(x) = 50(20 - x)(10 + x)$.

Calculer le montant de la recette pour $x = 5€$.

DOCUMENT REPONSE A RENDRE AVEC VOTRE COPIE

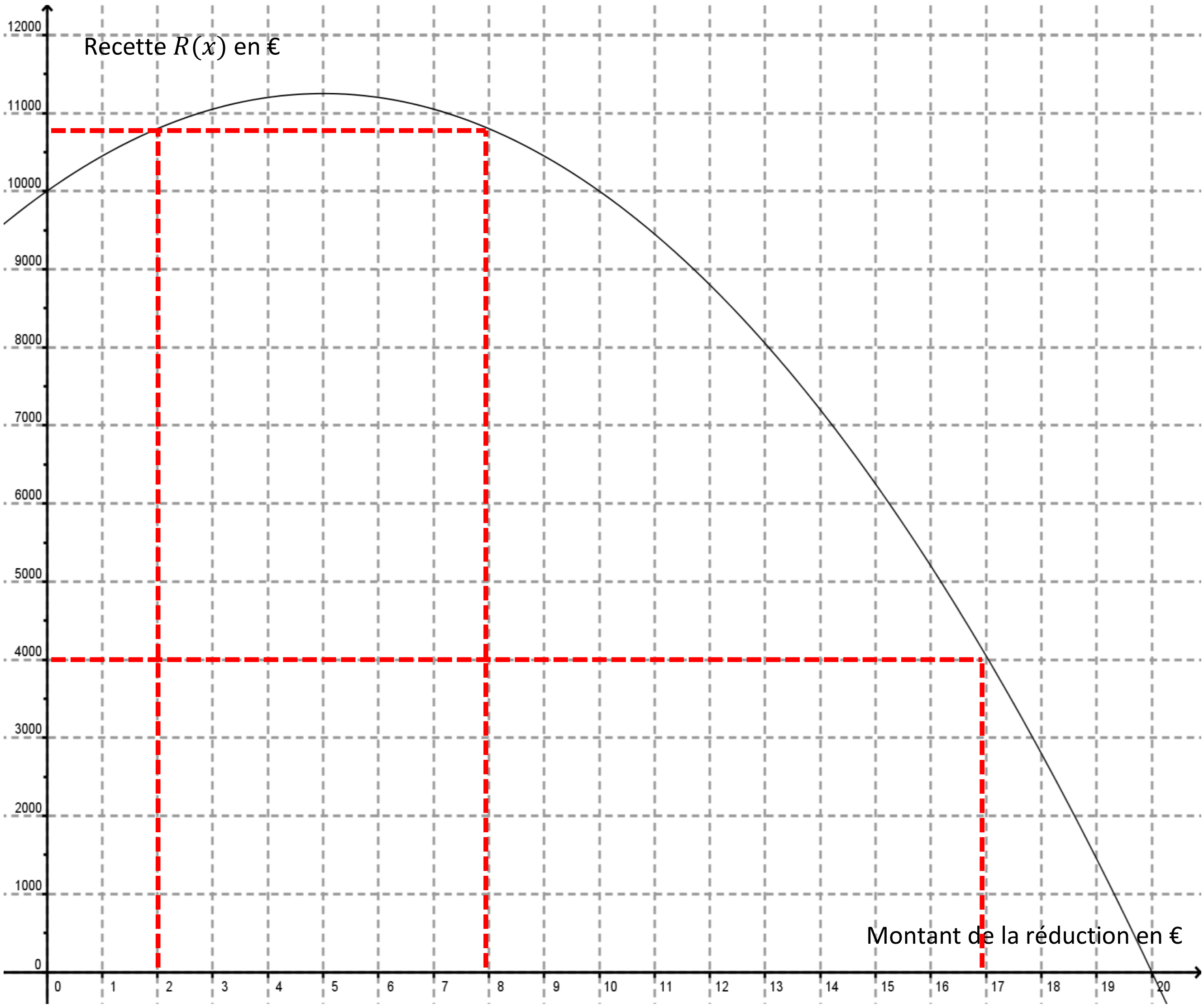
ANNEXE 1

x	− 2	− 1	0	1	2
$g(x) = 5x^2 + x - 7$		− 3	− 7	− 1	15
$h(x) = 2x - 7$	− 11	− 9	− 7	− 5	

ANNEXE 2

Réduction en €	Prix de la place en €	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	$20 \times 500 = 10\,000$
1	19	550	$19 \times 550 = 10\,450$
2	18	600	$18 \times 600 = 10\,800$
4	16	700	$16 \times 700 = 11\,200$

ANNEXE 3



Corrigé :

Exercice 1 :

Affirmation 1 : Fausse car 190 et 215 sont multiples de 5.
Affirmation 2 : Fausse car 72 possède 12 diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72 !
Affirmation 3 : Vraie car $(n-1)(n+1)+1 = n^2 - n + n + 1 = n^2$
Affirmation 4 : Fausse car 21 et 15 sont impairs et divisibles par 3 donc ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 2 :

-a- En appliquant l'algorithme d'Euclide, on trouve : PGCD(1755 ;1053)=351.
-b- $\frac{1053}{1755} = \frac{351\times3}{351\times5} = \frac{3}{5}$
-c- On pose : $\begin{cases} n \text{ le nombre de lots identiques} \\ c \text{ le nombre de coquillages par lot} \\ p \text{ le nombre de porcelaines par lot} \end{cases}$
On a alors : $n \times c = 1755 \;\; et \;\; n \times p = 1053$
Donc n est un diviseur commun à 1755 et 1053. Or on veut n maximum.
Alors n est égal au PGCD de 1755 et 1053 soit d'après la question a : $n = 351$.
On trouve donc : $351 \times c = 1755 \;\; et \;\; 351 \times p = 1053$
Ce qui donne finalement : $c = \frac{1755}{351} = 5 \;\; et \;\; p = \frac{1053}{351} = 3$.
On peut donc réaliser 351 lots contenant chacun 5 cônes et 3 porcelaines.

Exercice 3 :

-a- D'après le tableau, 1 a pour image -1 par la fonction g.
-b- $g(-2) = 5 \times (-2)^2 + (-2) - 7 = 5 \times 4 - 9 = 20 - 9 = 11$
-c- $h(2) = 2 \times 2 - 7 = 4 - 7 = -3$
-d- D'après le tableau, 0 est solution de l'équation $5x^2 + x - 7 = 2x - 7$.
De plus pour résoudre cette équation, on regroupe tous les termes dans le 1er membre, on factorise et on utilise la règle du produit nul :

$$\begin{aligned} 5x^2 + x - 7 = 2x - 7 &\Leftrightarrow 5x^2 + x - 7 - 2x + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(5x-1) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

Donc : $x = 0$ ou bien $5x - 1 = 0$

$$x = \frac{1}{5}$$

L'équation admet bien 2 solutions : 0 et $\frac{1}{5}$.

Exercice 4 :

-b- OELM est un losange car ses 4 côtés sont de la même mesure.
-c- Montrons que le triangle OEM n'est pas rectangle en O :
On a : $ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$ et $MO^2 + OE^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$
Donc $ME^2 \neq MO^2 + OE^2$, d'après le théorème de Pythagore, OEM n'est pas rectangle en O.
Ceci prouve que OELM n'est pas un carré. Charlotte avait raison !

Exercice 5 :

-a- Dans le triangle BCD rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} BC^2 = BD^2 + DC^2 &\Leftrightarrow 50^2 = 40^2 + DC^2 \\ &\Leftrightarrow DC^2 = 50^2 - 40^2 \\ &\Leftrightarrow DC^2 = 2500 - 1600 \\ &\Leftrightarrow DC^2 = 900 \\ &\Leftrightarrow DC = \sqrt{900} = 30m. \end{aligned}$$

-b- On calcule la surface du terrain :
Aire(ABCE)= Aire(ABDE)+ Aire(BCD)
= $40 \times 20 + \frac{30\times40}{2}$
= $800 + 600$
= $1400\ m^2$
Un sac pèse 15kg donc permet de traîter une surface de $15 \times 35m^2 = 525\ m^2$.
Donc il faudra acheter : $1400 \div 525 \approx 2{,}66$. Il faudra donc acheter 3 sacs !
-c- Calculons le périmètre du terrain : 40+20+50+30+20=160 m.
Donc 150 m de grillage ne suffisent pas !

Exercice 6 :

-a- On a : $\begin{cases} CB = 20cm = 0{,}2m \\ FG = 75 + 20 = 95cm = 0{,}95m. \\ RB = 1{,}8 - 1 = 0{,}8m \end{cases}$
-b- Les points R, C et F sont alignés dans le même ordre que R, B et G et (BC)//(FG)
D' après le théorème de Thalès on a : $\frac{RC}{RF} = \frac{RB}{RG} = \frac{BC}{GF} \Leftrightarrow \frac{RC}{RF} = \frac{0{,}8}{RG} = \frac{0{,}2}{0{,}95}$
Donc $RG = \frac{0{,}8\times0{,}95}{0{,}2} = 3{,}8m$. Ainsi : BG=3,8-0,8= 3m.
La profondeur du puits est de 3m.
-c- Le volume d'eau dans le puits est : $V(eau) = \pi r^2 h = 0{,}375^2 \times 2{,}6\pi = 0{,}365625\pi\ m^3 \approx 1{,}148\ m^3$.
Le berger a donc assez d'eau pour abreuver ses moutons !

Exercice 7 :

-a- On calcule le volume de la grande pyramide, calculer le volume de la petite pyramide en appliquant la loi des agrandissements-réductions puis soustraire les 2 résultats.

-b- $V(gde\ pyramide) = \frac{1}{3} \times Aire\ de\ Base \times hauteur$

$$= \frac{1}{3} \times 8^2 \times 15$$

$$= 320\ cm^3$$

Le coefficient de réduction est égal à : $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{15} = 0,4$.

Donc $V(petite\ pyramide) = 320 \times 0,4^3 = 20,48\ cm^3$.

On obtient finalement : $V(fromage) = 320 - 20,48 = 299,52\ cm^3$.

Exercice 8 :

-a- Tableau : Voir Annexe

-b- La recette pour une réduction de 2€ est d'environ 10 800€.

-c- Pour une recette de 4 000€, la remise est de 17€ et donc la place coûte 3€.

-d- L'image de 8 par la fonction R est environ 10 800.

Ceci signifie que la recette sera d'environ 10 800€ pour une remise de 12€.

-e- La recette maximale est d'environ 11 300€ pour une remise de 5€.

Le prix de la place est alors de 15€.

-f- On a : $R(x) = 50(20 - x)(10 + x)$

D'où, $R(5) = 50(20 - 5)(10 + 5) = 50 \times 15 \times 15 = 11\ 250$€.